

問題訂正

訂正箇所及び訂正内容

2 ページ

[1] 2 行目の数式

〔誤〕 A^n

↓

〔正〕 A^k

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目
---------------	------

受験番号	M
------	---

令和4年 1月 28日 9 : 0 0 ～ 1 2 : 0 0

注 意 事 項

1. 以下の用紙が配布されている.

問題用紙 (表紙を含む)	5 枚
解答用紙	3 枚
下書き用紙	3 枚

2. 問題は全部で 3 問ある.

3. 問 [3] では, (I) か (II) かいずれかの問題を選んで解答せよ.

4. 問題ごとに必ず一枚ずつ別々の解答用紙を用い, それぞれの解答用紙に問題番号を記入して解答せよ. 紙面が不足した場合は裏面を使用してよい.

5. 試験問題の表紙, 解答用紙, および下書き用紙のすべてに受験番号を記入せよ.

6. 試験終了時には, すべての解答用紙および下書き用紙を提出すること.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目

令和4年1月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[1] 各 3×3 実行列 A , 自然数 n について, 3×3 実行列 $S_n(A)$ を

$$S_n(A) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$$

と定める. また各 3×3 実行列 A について, 3×3 実行列 e^A を

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(A)$$

と定める. ただし $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(A)$ は行列 $S_n(A)$ の各成分についてそれぞれ $n \rightarrow \infty$ で極限をとって得られる行列とする.

以下,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とし, B のジョルダン標準形を J とおく.

以下の問いに答えよ.

(1) B の行列式と固有値を求めよ.

(2) B のジョルダン標準形 J を求めよ. また正則行列 P であって $J = P^{-1}BP$ となるものを一つ求め, その逆行列 P^{-1} も求めよ.

(3) 任意の自然数 n について以下の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) 行列 e^J を求めよ.

(5) 正則行列 P が $J = P^{-1}BP$ を満たすとき,

$$e^B = Pe^JP^{-1}$$

となることを示せ.

(6) 行列 e^B を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム

専門科目

令和 4 年 1 月実施

[2] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) 広義積分 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ の値を求めよ.

(2) 広義 2 重積分 $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+6xy-10y^2} dx dy$ の値を求めよ.

(B) 以下の問に答えよ.

(1) $f(x), g(x)$ は $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする. 広義積分

$$\int_0^\infty f(x)^2 dx, \quad \int_0^\infty g(x)^2 dx$$

が収束するとき, 以下の広義積分も収束することを示せ.

$$\int_0^\infty (f(x) + g(x))^2 dx$$

(2) 区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が, $[0, 1]$ 上で連続関数 g に一様収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$$

が成り立つことを示せ.

(C) 以下の問に答えよ.

(1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$ が収束することを示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は, $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) を満たすとする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が収束することを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 4 年 1 月実施
---------------	------	--------------

[3] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ.

(A) X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. X の部分集合 A, B について, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が成り立つか否かを判定し, 理由とともに答えよ.

(B) X, Y を集合とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. Y には開集合系 $\mathcal{O}_Y$ による位相が入っているとし,

$$\mathcal{O}_X := \{A \subset X \mid A = f^{-1}(O), O \in \mathcal{O}_Y\}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}_X$ が X の開集合系の公理を満たすことを示せ.

(2) f が全射とする. Y がコンパクトなら $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトと言えるかどうか判定し, 理由とともに答えよ.

(3) f が単射とする. Y がハウスドルフなら $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフと言えるかどうか判定し, 理由とともに答えよ.

(C) X を位相空間とする. 以下の問に答えよ.

(1) X の開部分集合 O と任意の部分集合 S に対し, $O \cap \overline{S} \subset \overline{O \cap S}$ と言えるかどうか判定し, 理由とともに答えよ.

(2) X の部分集合 A が任意の部分集合 S に対し, $A \cap \overline{S} \subset \overline{A \cap S}$ を満たすとする. このとき, A が開集合であるかどうか判定し, 理由とともに答えよ.

(II) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

- (1) 確率変数 X と Y は独立で, 共に $(0, 1)$ 上の一様分布に従うとする. このとき, $\min\{X, Y\}$ の確率密度関数を求めよ.
- (2) 確率変数 X と Y は独立で, 共に確率密度関数 $(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) を持つ標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする. このとき, 条件付き期待値 $E(X + Y|X \leq 0)$ の値を求めよ.

(B) 確率変数 X が, 分布関数

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\gamma} & (x \geq 1) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする. ただし, $\gamma > 2$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) X の確率密度関数 $f_X(x)$ を求めよ.
- (2) X の期待値 $E(X)$ と分散 $\text{Var}(X)$ を求めよ.
- (3) $Y = (\gamma - 1)X - \gamma$ とおくとき, Y の分布関数 $F_Y(y)$ を求めよ.
- (4) $\gamma \rightarrow \infty$ のとき, (3) で定めた Y はある確率変数 Z に分布収束する. Z の分布関数 $F_Z(z)$ を求めよ.